УДК 519.14

МЕТОД КОМПАКТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАМЯТИ

С. В. Костель, *ассистент,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В статье рассматривается метод компактного размещения биномиальных коэффициентов (БК) в памяти, который позволяет уменьшить объем памяти для хранения БК за счет использования их свойств. Приводится вывод формулы для нахождения адреса ячейки памяти для данного метода.

Ключові слова: *таблица биномиальных коэффициентов, адрес ячейки памяти, объем памяти.*

В статті розглядається метод компактного розміщення біноміальних коефіцієнтів (БК) в пам'яті, котрий дозволяє зменшити обсяг пам'яті для зберігання БК за рахунок використання їх властивостей. Наводиться виведення формули для знаходження адреси чарунки пам'яті для даного методу.

Ключові слова: *таблиця біноміальних коефіцієнтів, адреса чарунки пам'яті, обсяг пам'яті.*

ВВЕДЕНИЕ

Современные подходы к решению комбинаторных задач, связанных со сжатием [1] информации, генерированием комбинаторных конфигураций [2] и помехоустойчивым кодированием [3] зачастую требуют нахождения значения БК C_n^k. Существует два основных подхода к нахождению значений БК: хранение значений в памяти в виде некоторой таблицы или массива и вычисление значений в соответствии с комбинаторными формулами [4].

Подход, основанный на хранении значений, позволяет достичь максимального быстродействия. Но для его реализации необходимо наличие достаточного объема памяти, что приводит к увеличению аппаратно-программных затрат. Вычисление чисел сочетаний не требует больших объемов памяти при нахождении значений БК. Однако реализация такого подхода ставит дополнительные требования как при аппаратной реализации (наличие необходимых арифметических и логических операций) так и при программной (возможность выполнять математические операции над большими числами). Кроме того, вычисление значений БК приводит к снижению быстродействия работы системы. Выбор определенного подхода или комбинации различных подходов для нахождения значений БК определяется исходя из ограничений на быстродействие и объем аппаратно-программных затрат.

Уменьшить объем аппаратно-программных затрат при хранении значений в памяти можно за счет использования ряда свойств БК. Такой подход позволяет сократить число необходимых для хранения БК при незначительном увеличении числа выполняемых операций для извлечения определенного значения.

МЕТОД КОМПАКТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАМЯТИ

Для хранения значений всех БК с параметрами $n \in \overline{0, n_{\max}}$ и $k \in \overline{0, n}$ как правило используют память в виде таблицы, содержащей $\max(n)= n_{\max}$ строк и $\max(k)= n_{\max}$ столбцов. На пересечении n-й строки и k-го столбца находится значение БК C_n^k. Размер одной ячейки памяти составляет $n_{\max}$ разрядов ($n_{\max} > \log_2 C_{n_{\max}}^k$). Пример такой таблицы для $n_{\max}$=8 представлен в таблице 1.

Объем необходимой памяти Q_t для хранения таблицы БК определяется величиной:

$$Q_t = \left(n_{\max}\right)^3 . \qquad (1)$$

Исходя из кубической зависимости роста объема от величины $n_{\max}$, такой подход накладывает некоторые ограничения на значение параметра n.

Таблица 1 – Таблица биномиальных коэффициентов для $n_{\max} = 8$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	C_0^0								
1	C_1^0	C_1^1							
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2						
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3					
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4				
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5			
6	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6		
7	C_7^0	C_7^1	C_7^2	C_7^3	C_7^4	C_7^5	C_7^6	C_7^7	
8	C_8^0	C_8^1	C_8^2	C_8^3	C_8^4	C_8^5	C_8^6	C_8^7	C_8^8

Расширить диапазон возможных значений для n позволяет метод компактного размещения БК в памяти. Уменьшить объем памяти для хранения БК можно за счет ряда свойств для чисел сочетаний:

$$0 \le k \le 0, \qquad (2)$$

$$C_n^k = C_n^{n\text{-}k}, \qquad (3)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \qquad (4)$$

$$C_n^1 = C_n^{n\text{-}1} = n . \qquad (5)$$

Как видно из примера таблицы БК (табл. 1), в ней не используется половина ячеек в связи с ограничением (2), налагаемым на параметр k. С учетом свойства (2) можно размещать значения БК в памяти неравномерно, тем самым уменьшив объем необходимой памяти в два раза. Свойство симметрии (3) чисел сочетаний уменьшает диапазон значений параметра k до величины $n/2$ и позволяет сократить объем памяти еще в два раза. Свойства (4) и (5) дают возможность быстро определить значение БК без обращения к памяти, тем самым дополнительно сокращая ее объем.

Для данного метода, расположение БК в ячейках памяти целесообразно представлять не в виде таблицы, а в виде последовательности ячеек памяти $M[ADR]$ с некоторыми адресами ADR.

Значение адреса ADR ячейки памяти со значением БК C_n^k зависит от параметров n и k искомого БК. Пример компактного размещения БК в ячейках памяти представлен в таблице 2.

Этапы выполнения метода компактного размещения БК в памяти для нахождения значения C_n^k следующие:

1. Определение параметра k_n по формуле:

$$k_n = \begin{cases} k, & k \le n - k \\ n - k, & k > n - k \end{cases}. \qquad (6)$$

2. Нахождение значения C_n^k в зависимости от значения k_n

$$C_n^k = \begin{cases} 1, & k_n = 0 \\ n, & k_n = 1 \\ M[ADR], & 2 \le k_n \le \lfloor n/2 \rfloor \end{cases}. \qquad (7)$$

Где $M[ADR]$ - ячейка памяти с адресом ADR.

Таблица 2 – Пример компактного размещения значений биномиальных коэффициентов в памяти для n_{max}=10

№ ячейки памяти	0	1	2	3	4	5	6	7
Биномиальный коэффициент	C_4^2	C_5^2	C_6^2	C_6^3	C_7^2	C_7^3	C_8^2	C_8^3
№ ячейки памяти	8	9	10	11	12	13	14	15
Биномиальный коэффициент	C_8^4	C_9^2	C_9^3	C_9^4	C_{10}^2	C_{10}^3	C_{10}^4	C_{10}^5

Адрес ADR ячейки памяти $M[ADR]$ содержащей БК $C_n^{k_n}$ с параметрами n и k_n определяется по формуле:

$$ADR = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (n \bmod 2) - 2\right) + k_n - 2\,, \qquad (8)$$

где $(n \bmod 2)$ - остаток от деления параметра n на 2 (младший разряд двоичного значения n).

Далее приведен вывод формулы (8). Зависимость ADR от n и k_n будет определяться свойствами (2)-(5) для БК.

В результате применения свойства (2), каждому значению параметра n будет соответствовать ряд значений параметра k_n. Число различных k_n для заданного n будет равно (n +1). Начало ряда значений (при k_n=0) для заданного n будет отстоять от начала ряда для предыдущего значения - (n -1) на величину n. То есть

$$ADR(n,0) = ADR(n-1,0) + n\,. \qquad (9)$$

Первые 16 значений зависимости между адресами ADR и параметрами n и k_n представлены в таблице 3.

Выполнив рекуррентное разложение по формуле (9), а так же с учетом того, что ADR (0,0) = 0, получим

$$ADR(n,0) = ADR(n-1,0)+n = ADR(n-2,0)+(n-1)+n = ... = \sum_{i=1}^{n} i\,. \qquad (10)$$

Таблица 3 - Зависимость между адресами ADR и параметрами n и k_n в результате применения свойства (2)

ADR	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5
k_n	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0

Воспользовавшись формулой для арифметической прогрессии, имеем

$$ADR(n,0) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\,. \qquad (11)$$

С учетом смещения для k_n, зависимость ADR от n и k_n будет иметь вид

$$ADR(n,k_n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + k_n\,. \qquad (12)$$

Свойство (3) уменьшает число различных значений k_n для заданного n в два раза ($0 \le k_n \le \lfloor n/2 \rfloor$). Каждому четному и нечетному значению n будет соответствовать $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ различных значений k_n. Применив рассмотренными ранее выкладками для четных и нечетных значений n, а так же с учетом того, что общее количество различных значений вплоть до n равно сумме числа четных и нечетных предыдущих значений, в результате получим:

$$ADR(n,k_n) = 2\cdot\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} i + k_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) + k_n\,,\ n \text{ - четное;} \qquad (13)$$

$$ADR(n,k_n) = 2\cdot\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} i + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) + k_n = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)^2 + k_n\,,\ n \text{ - нечетное.} \qquad (14)$$

Четность или нечетность значения n можно определить по младшему разряду двоичного представления данного числа или по остатку от деления числа n на 2. Обозначим операцию получения остатка от деления как mod . Работу операции mod можно представить в следующем виде

$$(n \bmod 2) = \begin{cases} 0, & n - \\ 1, n - & \end{cases}\,. \qquad (15)$$

Воспользовавшись операцией $\bmod$, запишем выражения (13) и (14) в общем виде

$$ADR(n,k_n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (n \bmod 2) \right) + k_n \,. \tag{16}$$

В таблице 4 представлены распределения значений адресов *ADR* и параметров n и k_n, полученные в результате использования свойств (2) и (3) для уменьшения таблицы БК.

Таблица 4 - Зависимость между адресами ADR и параметрами n и k_n в результате применения свойства (2) и (3)

ADR	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	0	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6
k_n	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3

Свойства (4) и (5) позволяют получать значения БК без обращения к памяти. В результате использования всех свойств (2)-(5) для уменьшения объема памяти, диапазон значений k_n, и, следовательно, число ячеек памяти для заданного параметра n будет находиться в диапазоне $2 \le k_n \le \lfloor n/2 \rfloor$. Для получения зависимости *ADR* от n и k_n необходимо в выражении (16) заменить значение $\lfloor n/2 \rfloor$ на $(\lfloor n/2 \rfloor - 2)$, а значение k_n на (k_n -2). В результате выполнения замены, получим зависимость (8) для *ADR* (n,k_n) в методе компактного размещения БК в памяти. Из неравенств $n \ge k$ и $n \ge (\mathrm{n} - k)$ получим минимальное значение для n равное min(n)=4 при обращении к первой ячейке памяти с адресом *ADR*(4,0)=0.

Таблица соответствия между адресами *ADR* ячеек памяти и параметрами n и k_n для метода компактного размещения БК в памяти представлена в таблице 5.

Таблица 5 - Зависимость между адресами ADR и параметрами n и k_n k_n для метода компактного размещения биномиальных коэффициентов в памяти

ADR	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	4	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	10
k_n	2	2	2	3	2	3	2	3	4	2	3	4	2	3	4	5

Количество ячеек памяти N для хранения компактной таблицы БК с максимальным значеним max(n)=$n_{\max}$ будет определяться максимальными значениями параметров n и k_n в соотношении (8). С учетом того, что $\max(k_n) = \lfloor n_{\max}/2 \rfloor$, получим

$$N = \left(\left(\left\lfloor \frac{n_{\max}}{2} \right\rfloor - 1 \right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n_{\max}}{2} \right\rfloor + (n_{\max} \bmod 2) - 1 \right) - 1 \right). \tag{17}$$

Размер одной ячейки памяти для хранения БК является величиной постоянной и составляет $n_{\max}$ разрядов. Объем памяти Q, необходимый для реализации метода компактного размещения БК в памяти определяется по формуле

$$Q = N \cdot n_{\max} = \left(\left(\left\lfloor \frac{n_{\max}}{2} \right\rfloor - 1 \right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n_{\max}}{2} \right\rfloor + (n_{\max} \mathrm{mod} 2) - 1 \right) - 1 \right) \cdot n_{\max} . \qquad (18)$$

Сравнив значение из (18) со значением (1) для исходной таблицы БК, можно видеть, что объем необходимой памяти для хранения БК сократился более чем в 4 раза.

ВЫВОДЫ

Достоинством метода компактного размещения БК в памяти является высокая скорость нахождения значений C_n^k, которая зависит только от времени вычисления функции (8) для нахождения адреса ADR и скорости считывания значений из ячеек памяти. Значения БК, которые хранятся в таблице, являются постоянными и, следовательно, могут быть реализованы аппаратно в виде специализированных микросхем или на базе постоянных запоминающих устройств с высоким быстродействием. Функция (8) состоит из простых арифметических операций умножения, сложения и вычитания. Расчет значения $\lfloor n/2 \rfloor$ можно реализовать при помощи операции сдвига, а нахождение значения ($n$mod2) при помощи логических операций извлечения значения младшего разряда в n.

При достаточно больших значениях n объем памяти Q для предложенного метода компактного размещения БК резко возрастает. В этом случае целесообразно перейти от методов хранения БК к методам их быстрого вычисления [5,6].

SUMMARY

METHOD OF COMPACT ALLOCATION BINOMIAL COEFFICIENTS IN MEMORY

S.V. Kostel
Sumy State University, Sumy

The paper expounds the method of compact allocation binomial coefficients in memory. This method allows to reduce memory size for storage binomial coefficients with the use of its features. Expression for memory address for this method is considered.

Keywords: *binomial coefficients table, memory address, memory size.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Borisenko O. Binary image compression based on binomial numbers / O. Borisenko, I. Kulyk, S. Kostel, O. Skordina // Bulletin Petroleum – Gas University of Ploiesti, Mathematics-Informatics-Physics Series. – 2010. - Vol. LXII, №2. – P. 1-12.
2. Кулик И. А. Формирование квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик, С. В. Костель, Е. М. Скордина // Вестник Сумского государственного университета. - 2010. - № 1. - С. 134-142.
3. Борисенко А. А. Моделирование систем передачи данных с мажоритарным принципом кодирования на основе биномиальных кодов / А. А. Борисенко, И. А. Кулик, В. В. Гриненко // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2004. – № 128. – С. 9-16.
4. Борисенко А. А. Введение в теорию биномиального счета: монография. – Сумы: ИДТ "Университетская книга", 2004. – 88 с.
5. Кулик И. А. Быстродействующий метод биномиального нумерационного кодирования / И. А. Кулик, С. В. Костель // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2009. – Вып. 149. - С. 66-76.
6. Кулик И. А. Метод вычисления биномиальных коэффициентов на основе канонического разложения чисел / И. А. Кулик, Е. М. Скордина // Вісник Сумського державного університету. Технічні науки. - 2008. - № 1. - С. 158 - 165.

Поступила в редакцию 16 мая 2012 г.